数理解析研究所講究録
39巻 1968年 131-136

Contraction Semi-group の摂動

東大理　吉田耕作

§1 作用素の分数巾の利用

(C_0)型の contraction semi-group in a B-space X (以下 (C_0)型の c.s.-g. と書く) $\{T_t; t \geqq 0\}$ の infinitesimal generator (以下 i.g. と書く)をAとする. Xにおける線型作用素BをAに加えた$(A+B)$がまた(C_0)型の s.-g. の i.g. になるための十分条件についての詳しい研究が E. Hille-R.S. Phillips [1] に述べられているが, 稍々一般的に過ぎて面倒である.

ここでは"作用素の分数巾"(例えば K. YOSIDA, [1]) を使っての一つの扱い方を述べる.

<u>定理1.</u> A, Bを B-space Xにおける(C_0)型の c.s.-g. の i.g. とする. $\hat{A}_\alpha$ $(0<\alpha<1)$ を"Aの分数巾"とし,

(1) $\quad D(B) \supset D(\hat{A}_\alpha)$

と仮定すれば, $(A+B)$がまた(C_0)型の c.s.-g. の i.g. になる.

証明の方針　$D(\hat{A}_\alpha) \supseteq D(A)$ かつ

(2)　$(-A)^\alpha x = -\hat{A}_\alpha x = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}(\lambda I-A)^{-1}(-Ax)\,d\lambda$
　($x\in\mathfrak{D}(A)$ のとき)

なることを用い

(3)　$\|\hat{A}_\alpha x\| \le \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{2^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)}\|Ax\|^\alpha\cdot\|x\|^{1-\alpha}$,　$x\in D(A)$

これから，任意の $a>0$ に対して適当に $b>0$ をとれば

(3)'　$\|\hat{A}_\alpha x\| \le a\|Ax\| + b\|x\|$,　$x\in D(A)$

一方において仮定 $D(B)\supseteq D(\hat{A}_\alpha)$ と閉グラフ定理により，正数 c により

(4)　$\|Bx\| \le c(\|\hat{A}_\alpha x\|+\|x\|)$,　$x\in\mathfrak{D}(\hat{A}_\alpha)$

ゆえに

(5)　$\|Bx\|\le ac\|Ax\|+c(b+1)\|x\|$,　$x\in \mathfrak{D}(A)$

したがって $\lambda>0$ として，$x\in X$ ならば

(6)　$\|B(\lambda I-A)^{-1}x\| \le ac\|A(\lambda I-A)^{-1}x\| + c(b+1)\|(\lambda I-A)^{-1}x\|$

$A(\lambda I-A)^{-1} = \lambda(\lambda I-A)^{-1} - I$ と $\|\lambda(\lambda I-A)^{-1}\|\le 1$ (これは T_t が contraction s.-gr. of class (C_0) ということからわかる) によって

(7)　$\|B(\lambda I-A)^{-1}\|<1$ for $2ac+\lambda^{-1}c(b+1)<1$

このような $\lambda>0$ に対して，$(I-B(\lambda I-A)^{-1})^{-1}$ が有界な逆をもつ したがって $R((I-B(\lambda I-A)^{-1})=X$. したがっ

って $R(\lambda I-A)=X$ により

$$R(\lambda I-A-B)=R((I-B(\lambda I-A)^{-1})(\lambda I-A))=X$$

一方において A, B ともに c. s.-gr. の i. g. だから $(\lambda-A-B)^{-1}$ の存在は $\|\lambda(\lambda-A-B)^{-1}x\| \leqq \|x\|$, $x \in R(\lambda-A-B)$, とともにわかっている。

だから有界な逆 $(\lambda I-A-B)^{-1}$ が存在しかつ $\|\lambda(\lambda I-A-B)^{-1}\| \leqq 1$ がいえる。

<u>系</u> A が holomorphic s.-gr. の i. g. ならば、$(A+B)$ も holomorphic s.-gr. の i. g. になる。

<u>Proof</u> $\overline{\lim_{|\tau|\uparrow\infty}} |\tau| \|((\sigma_0+i\tau)I-A)^{-1}\| < \infty$

と假定すれば、上の証明のやり方で

$$\|\tau((\sigma_0+i\tau)I-A-B)^{-1}\| \leqq \|(I-B((\sigma_0+i\tau)I-A)^{-1})^{-1}\| \times \|\tau((\sigma_0+i\tau)I-A)^{-1}\|$$

を得て $\overline{\lim_{|\tau|\uparrow\infty}} |\tau| \|((\sigma_0+i\tau)I-A-B)^{-1}\| < \infty$

<u>註</u> 上の結果は K. YOSIDA: A perturbation theorem for semi-groups of linear operators, Proc. Jap. Acad. 41 (1965), 645-647 に発表されている。

I. Miyadera: A perturbation theorem for contraction semi-groups, ibid., 755–758 で

定理2. $D(B) \supseteq D(A)$ かつ，B と A とが (C_0)型の c. s.-gr. の i. g. ならば $A+\hat{B}_\alpha$ $(0<\alpha<1)$ も c. s.-gr. の i. g. ((C_0)型の) である．

を証明した，証明の idea は定理1とほぼ同様である．また定理1系に相当することもほぼ同様にして証明される．

§2. Holomorphic Markov Processへの応用．

定理1の応用として例えば次の結果が得られる (K. YOSIDA: On holomorphic Markov processes, Proc. Jap. Acad. 42 (1966), 313–317):

(8) $$A = a^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + q(x)$$

において a, a', b, q は $(-\infty,\infty)$ において有界な一様連続な実数値函数で，且つ

(9) $$q(x) \leqq 0, \quad 0 < \delta \leqq a(x) \quad (\delta\text{は正数})$$

とする：このとき A を infinitesimal generator とする $C[-\infty,\infty]$ における (C_0)型の semi-group は holomorphic semi-group である．

§3. Trotter の Product 公式

Theorem 4. A, B が contr. s-g. of class (C_0) の i.g. で，かつ $\underbrace{A+B}_{D(A)\cap D(B)\text{ を domain とする}}$ もまたそのような i.g. とする．このとき

(10) $$P_t = e^{tA},\quad Q_t = e^{tB},\quad R_t = e^{t(A+B)}$$

とおくと，t の有限区間で一様に

(11) $$\begin{cases} u \in \mathcal{D}(A)\cap\mathcal{D}(B) \text{ に対して} \\ R_t u = \underset{n\to\infty}{s\text{-}\lim}\,(P_{t/n}\,Q_{t/n})^n u \end{cases}$$

が成立つ．

証明．$h = \frac{t}{n}$ とおく．

$$(P_h Q_h)^n - R_h^n = \sum_{j=0}^{n-1} (P_h Q_h)^{n-1-j}(P_h Q_h - R_h) \times R_h^j$$

だから，P_t, Q_t がともに contraction なることから

$$\|\{(P_h Q_h)^n - R_h^n\}u\| \leqq n \sup_{0\leqq s\leqq t} \|(P_h Q_h - R_h)R_s u\|$$

$$= t \sup_{0\leqq s\leqq t} \left\| \frac{P_h Q_h - R_h}{h} R_s u \right\|$$

ところが $u \in \mathcal{D}(A+B)$ ならば $u \to R_s u$ はまた $\mathcal{D}(A+B)$ に入り，かつ $\underbrace{s\text{-continuous}}_{\text{in } s}$ であるから結局

$u \in \mathcal{D}(A+B)$ なるとき

$$\frac{P_h Q_h - R_h}{h} u = P_h \frac{Q_h - I}{h} u + \frac{P_h - I}{h} u - \frac{R_h - I}{h} u$$

が 0 に s-converge することがいえればよい。ところが右辺第2項, 第3項はそれぞれ Au, $(A+B)u$ に s-converge する. また右辺第1項もまた, P_h の $h=0$ における s-continuity と $\|P_h\| \leqq 1$ とから, Bu に s-converge して証明をおわる.

註 Trotter の論文は H. F. Trotter: On the product of semi-groups of operators, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 545-551 にある. ここには E. Nelson - G. Faris: La formule de Trotter dans les semi-groupes et son application à l'interpretation de l'intégrale de Feynman (Seminaire Lions-Schwartz, 1967 (?)) にしたがって述べた.